



MODEL REFERANS UYARLAMALI KONTROLCÜLERDE SİSTEMDEKİ BELİRSİZLİĞİ ZAMANA BAĞLI CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE PARAMETRİZE ETME

Mustafa GÜRLER¹, Ali Türker Kutay²
^{1,2}Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

ABSTRACT

In this work, we present a Chebyshev Polynomial Based Model Reference Adaptive Control (MRAC) with aerospace applications. To parametrize the structured and unstructured uncertainty on the system, Chebyshev Polynomials are rewritten in terms of time. Beside the superb polynomial approximation property, fewer variables need in adaptive element facilitates the controller design process. We show and discuss the simulation results of MRAC with time based Chebyshev Polynomials on aircraft nonlinear dynamics by considering tracking performance with the reference model to be followed.

ÖZET

Bu çalışmada, Chebyshev Polinomlarına dayalı Model Referans Uyarlamalı Kontrolcülerin (MRAC) havacılık alanındaki uygulamaları sunulmaktadır. Sistem üzerindeki yapılandırılmış ve yapılandırılmamış belirsizlikleri parametrize etmek için Chebyshev Polinomları zaman açısından yeniden yazılmıştır. Mükemmel polinomsal yaklaşma özelliğinin yanı sıra, uyarlanabilir elemanda daha az değişkene ihtiyaç duyulacak olması kontrolcü tasarım sürecini kolaylaştırır. Takip edilecek referans model ile takip performansını göz önüne alarak, hava aracının doğrusal olmayan dinamikleri üzerinde zamana bağlı Chebyshev Polinomları ile MRAC simülasyon sonuçları gösterilecek ve tartışılacaktır.

GİRİŞ

Adaptif kontrol, 1950'lerin başından beri kontrol teorisinde çok popüler bir konudur. Adaptif kontrol alanı, gerçek sistemi tam olarak temsil etmeyen modellerin kontrolü ile ilgilenir. İki model arasındaki farkın kaynakları: doğrusallaştırma hataları, modeldeki derece düşürümü, ideal durum varsayımları ve harici doğrusal/doğrusal olmayan bozucu etkilerdir. Bu kaynaklar sistem üzerinde bir belirsizlik olarak kabul edilir ve çoğunlukla doğrusal değildir. LQR optimal kontrolcüler, sistem giriş kanallarında bulunan zamana veya model durumlarına bağlı doğrusal olmayan belirsizlikler ile başa çıkabilir. Bu tür belirsizlikler "eşleşmiş" olarak adlandırılır. Bu eşleşme koşulu, bir çözüm kümesi bulunması halinde kontrolcünün eşleşmiş belirsizliği ortadan kaldırdığını söyler. Bununla birlikte, LQR kontrolcüler tüm belirsizlik sınıflarına karşı dayanıklı olacak şekilde tasarlanmıştır ve sadece özel bir belirsizliği iptal etmeye uygun değildir. Başka bir deyişle, LQR kontrolcüler kontrol sistemi tasarımı için gereğinden fazla biçimde çalışabilir ve bu kısım adaptif kontrolcülerin son derece etkili olduğu noktadır [1].

Uyarlamalı kontrol doğrudan uyarlamalı kontrol ve dolaylı uyarlamalı kontrol olarak iki gruba ayrılır. Dolaylı uyarlamalı kontrolün aksine direkt uyarlamalı kontrolün temel özelliği kontrolcü parametrelerini doğrudan uyarlamaktır. Bu özellik kontrolcüye hızlı uyum süreci sağlar ve en yaygın olarak kullanılan doğrudan uyarlanabilir kontrolcülerin, yani Model Referans Adaptif Kontrolcülerin (MRAC) başlangıç noktasıdır. MRAC konsepti 1958'de Whitaker [2] tarafından önerilmiştir. MRAC'ın temel amacı, üzerinde belirsizlikler olan bir sistemin istenilen model tepkisini takip etmesini sağlamaktır. Bu nedenle, MRAC kontrolcülerinin kontrolcü katsayısını ayarlamak için ağırlık güncelleme yasasına ve sistem üzerindeki belirsizliği parametrize etmek için de uyarlanabilir elemana ihtiyacı vardır. Belirsizliğin kesin bir yapısı yoksa uyarlanabilir elemanın bu belirsizliği parametrize etmesine ihtiyaç vardır ve evrensel yaklaşıcılar bu amaç için yaygın olarak kullanılır. Son yıllarda, Tek Gizli Katmanlı Sinir Ağları ve Radyal Tabanlı Sinir Ağları yapılandırılmamış belirsizliği tahmin etmek için sıklıkla kullanılmaktadır. Yeni bir yaklaşım olarak, fonksiyonel yaklaşım için Chebyshev Polinomları taban fonksiyonu olarak kullanılmıştır [3] ve Chebyshev Polinomları'nın diğer tüm polinom tipleri üzerinde en iyi fonksiyon yaklaşımını sağladığı gösterilmiştir [4].

Bu yazıda, bir hava aracı dinamiğinin doğrusal olmayan modeline MRAC kontrolcüsü tasarlanmaktadır. Temel/nominal kontrolcü sistem üzerinde herhangi bir belirsizlik olmadığı durumda kapalı döngü kararlılığını sağlayan bir LQR kontrolcüsüdür. Sistemdeki belirsizlikleri parametrize etmek için Chebyshev Polinomları kullanılmıştır. Bununla birlikte, bu polinomlar genel kullanımından (sistem duruma bağlı) farklı olarak, ortogonal özelliğini de koruyarak zamana bağlı olacak şekilde yeniden yazılmıştır. Bu yöntem, MRAC kontrolcüsünün uyarlanabilir elemanında daha az parametre ihtiyacı sağlar ve tasarımı daha kolay hale getirir.

Doğrusal olmayan hava aracı sistemi için, kontrolcü wing-rock dinamiği üzerinde kullanmıştır ve bu dinamik, ileriki zamanlarda helikopter dinamiği ile değişecektir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Bu bölümde, sistem durumlarının referans modelin durumlarını asimptotik ve düzenli olarak izlemesini sağlayacak model referans adaptif kontrolcü tasarım metodolojisi anlatılacaktır. İlk olarak bir MRAC problemi belirtilecektir. Aşağıdaki belirsiz sistemi göz önünde bulundurursak:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Lambda[\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x})]$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, sistem durum vektörü, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ kontrol girdisi, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sabit matrislerdir. Ayrıca, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}\Lambda)$ çifti kontrol edilebilir ve Λ diyagonaldir. $\mathbf{f}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, eşleşmiş bir belirsizliktir ve $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 'in bileşenleri $(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}))$ bilinmeyen katsayılar \mathbf{W}_i ile lokal Sürekli-Lipschitz $\beta_i(\mathbf{x})$ taban fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak parametrize edilebilir.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{W}_i \beta_i(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$$

Takip edilecek referans modelini yazacak olursak:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{ref}} = \mathbf{A}_{\text{ref}} \mathbf{x}_{\text{ref}}(t) + \mathbf{B}_{\text{ref}} \mathbf{r}(t)$$

$\mathbf{x}_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}^n$ Hurwitz referans model durum vektörü, $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^m$ dışarıdan gelen limitli komut vektörü, $\mathbf{A}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz ve $\mathbf{B}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Hata vektörünü tanımlayacak olursak,

$$\mathbf{e}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}_{\text{ref}}(\mathbf{t})$$

Daha sonra modele nominal kontrolcüyü uygularsak,

$$\mathbf{u}_{\text{nom}}(\mathbf{t}) = -\mathbf{K}_{fb}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}_{ff}\mathbf{r}(\mathbf{t})$$

Kapalı döngü sistemi şu şekilde yazılır:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{fb})\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{K}_{ff}\mathbf{r}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{A}_{\text{ref}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_{fb} \quad , \quad \mathbf{B}_{\text{ref}} = \mathbf{B}\mathbf{K}_{ff}$$

\mathbf{K}_{fb} ve \mathbf{K}_{ff} varolduğunu varsayarsak, kapalı döngü sisteminin referans model ile aynı olacağı ve limitlenmiş herhangi bir referans girişi $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ için istenen takip performansına ulaşılabileceği görülür.

Kontrol yasasını yazacak olursak,

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{u}_{\text{nom}}(\mathbf{t}) - \mathbf{u}_{\text{ad}}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{u}_{\text{ad}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$$

$\hat{\mathbf{W}} \in \mathbb{R}^{sm}$ tahmini ağırlık matrisidir.

Son olarak, e-modifikasyon ile [5], ağırlık güncelleme yasası yazılır.

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \gamma [\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\mathbf{e}^T(\mathbf{t})\mathbf{P}\mathbf{B} - \sigma |\mathbf{e}(\mathbf{t})| \hat{\mathbf{W}}]$$

γ pozitif öğrenme oranı, σ pozitif e-modifikasyon terimi, $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Lyapunov denkleminin simetrik pozitif çözümüdür.

$$\mathbf{A}_{\text{ref}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{\text{ref}} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Her $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ için; \mathbf{W} , belli limitler dahilinde kalır ve $\mathbf{t} \rightarrow \infty$ iken $\mathbf{e}(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{0}$ olur.

Belirsizliklerin Parametrize Edilmesinde Chebyshev Polinomlarının Kullanılması:

Chebyshev polinomları, özellikle diğer fonksiyonlara yaklaşım için uygun olan özel bir polinom sınıfı oluştururlar [6]. Chebyshev polinomları evrensel yaklaşıcılardır ve sayısal analiz için yaygın olarak kullanılırlar.

Birinci dereceden Chebyshev polinomu $n \geq 0$ şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \cos(n \arccos(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{T}_n(\mathbf{x}) = \cos(n\theta)$$

$\mathbf{x} = \cos\theta$ ve $\mathbf{x} \in [-1, 1]$.

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = 1$$

$$\mathbf{T}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{T}_2(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 - 1$$

$$\mathbf{T}_3(\mathbf{x}) = 4\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}$$

$$\mathbf{T}_4(\mathbf{x}) = 8\mathbf{x}^4 - 8\mathbf{x}^2 + 1$$

Eşleşmiş belirsizliği Chebyshev polinomları ile parametrize edecek olursak,

$$f(\mathbf{x}) \cong F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N c_i T_{i-1}(\mathbf{x})$$

Bu yaklaşımı kullanmak için durum bilgisine ihtiyacımız vardır. Ayrıca, sistemdeki belirsizlikten etkilenen birden fazla sistem durumu olabilir. Ama yaklaşımı aşağıdaki gibi zamana bağlı yaparsak,

$$\mathbf{x} = \cos(t)$$

Chebyshev polinomlarının yeni hali şu şekilde olur,

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = \cos(t)$$

$$T_2(t) = 2(\cos(t))^2 - 1$$

$$T_3(t) = 4(\cos(t))^3 - 3\cos(t)$$

$$T_4(t) = 8(\cos(t))^4 - 8(\cos(t))^2 + 1$$

Sonuç olarak, Chebyshev polinomları yalnızca zamana bağlı olacak şekilde yazılmış olur. Bu sayede sistem üzerindeki belirsizlikler daha az parametre ile ifade edilmektedir ve bu yöntem hızlı adaptasyon süreci sunmaktadır.

$$f(t) \cong \sum_{i=1}^N c_i T_{i-1}(t) = \hat{\mathbf{W}}^T \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})$$

SAYISAL SONUÇLAR

Wing-rock dinamiği üzerinde kontrolcü testleri:

Bildiğimiz wing-rock dinamiğini düşünürsek,

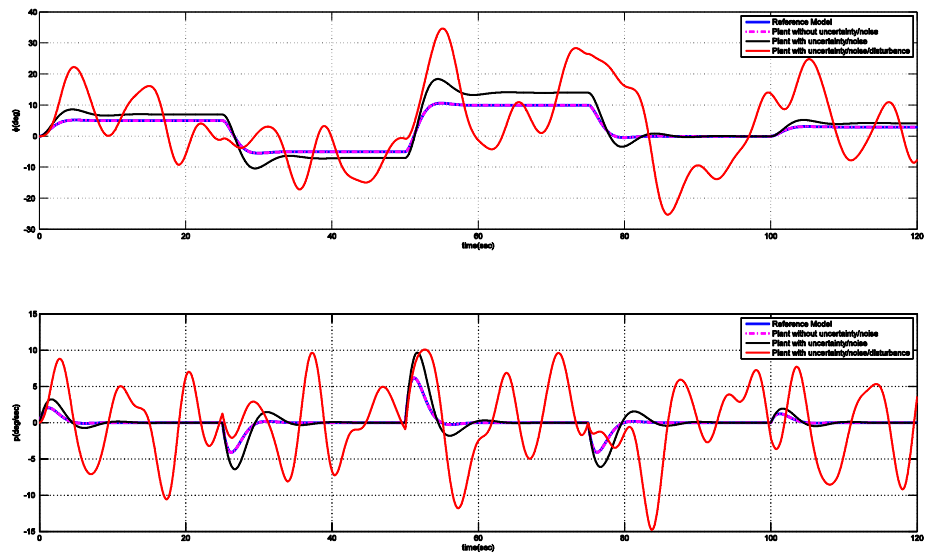
$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathbf{u}(t) + f(\mathbf{x})]$$

$$f(\mathbf{x}) = 0.2314\mathbf{x}_2 + 0.6918\mathbf{x}_1 - 0.6245|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_1 + 0.0095|\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_1 + 0.0214\mathbf{x}_2^3$$

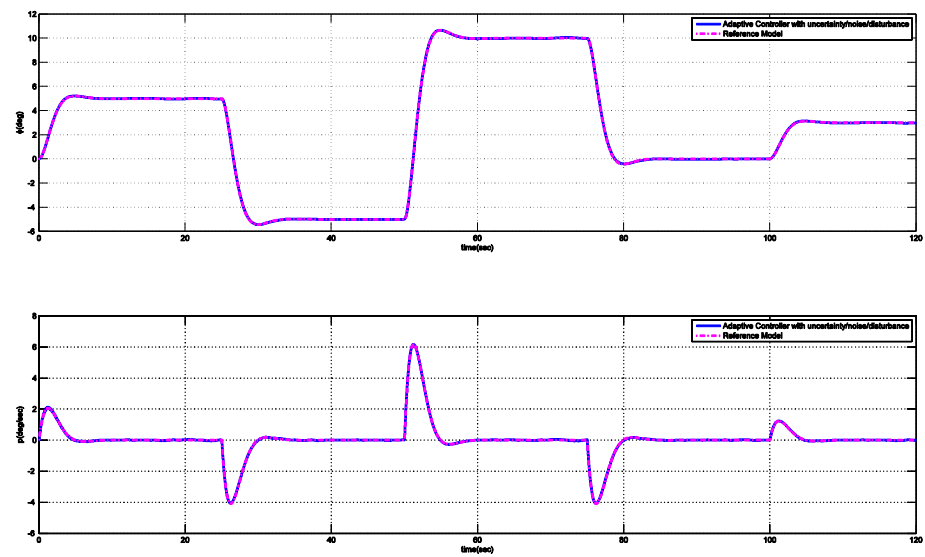
$\boldsymbol{\phi}$ yuvarlanma açısı, \mathbf{p} yuvarlanma açısal hızı ve $\mathbf{u}(t)$ delta kanatlı uçağın kanatçık girdisidir.

Referans model doğal frekansı 0.9 rad/s ve sönümleme oranı 0.707 olan ikinci dereceden bir dinamik olarak seçilmiştir.

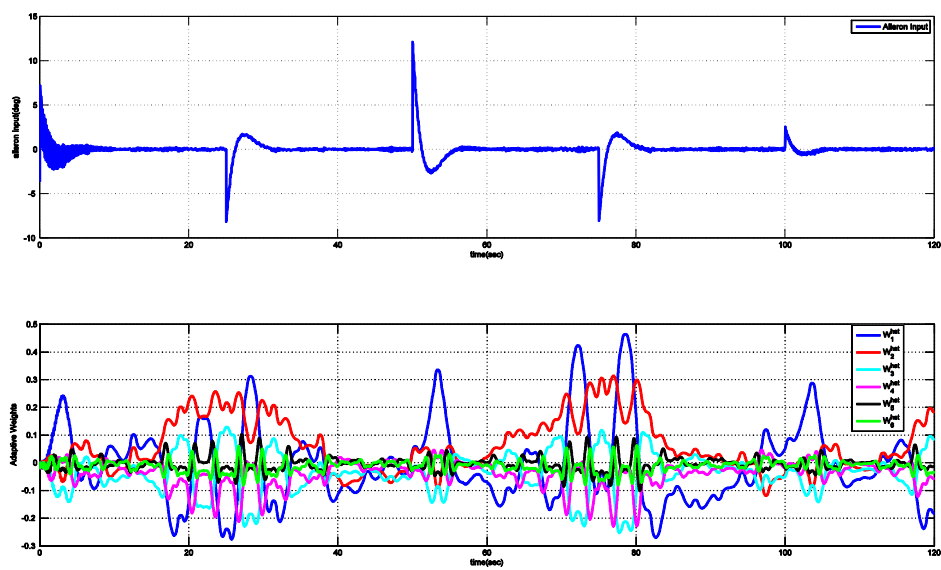
Herhangi bir belirsizlik, gürültü ve bozulma olmadığı durumda, referans sistem ve gerçek sistem tepkisi Şekil 1'de verilmektedir. Ayrıca, sisteme 10^{-5} normunda bir gürültü ve $\pm 10^\circ$ rastgele kanatçık girdisi verilmektedir. Sistemin yeterince fazla bozulması için yüksek girdiler seçilmiştir.



Şekil 1: Nominal Kontrolcü Tepkisi



Şekil 2: Zamana Bağlı Chebyshev Polinomları ile Model Referans Adaptif Kontrolcü Tepkisi



Şekil 3: Toplam Kontrol Girdisi ve Uyarlanabilir Ağırlıklar

Helikopter dinamiği üzerinde kontrolcü testleri:

Yunuslama, yuvarlanma ve sapma eksenlerindeki helikopter dinamiğini ele alalım.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x = [u \ v \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi]^T$$

$$u = [\delta_{lon} \ \delta_{lat} \ \delta_{ped}]^T$$

u gövde koordinat sistemi x eksenindeki doğrusal hızı, v gövde koordinat sistemi y eksenindeki doğrusal hızı, p yuvarlanma açısal hızı, q yunuslama açısal hızı, r sapma açısal hızı, ϕ yuvarlanma açısı, θ yunuslama açısı, ψ sapma açısı, δ_{lon} pilot kumandasının boylamsal hareketi, δ_{lat} pilot kumandasının yanal hareketi ve δ_{ped} pedal girdisidir.

R-50 model helikopterin 100m yüksekliğinde asılı kalma durumunda denge halindeki sistem matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} -0.027356 & 0.0069169 & -0.013125 & 0.6955 & -0.011633 & 0 & -9.7482 & 0 \\ -0.0055414 & 0.0018459 & -0.6991 & -0.013643 & 0.09553 & 9.7418 & 0.039782 & 0 \\ -0.068252 & -0.18916 & -8.7818 & -1.1 & 0.43126 & 0 & 0 & 0 \\ 0.082262 & -0.025336 & 0.3491 & -2.8095 & 0.080074 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0060813 & -0.29301 & 0.51354 & 1.2612 & -1.1514 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.004081 & -0.11272 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99935 & -0.036181 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.03641 & 1.0057 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10.064 & 0.10791 & 0 \\ -0.10791 & 10.064 & -4.3180 \\ -1.5614 & 126.89 & -13.943 \\ -40.667 & -0.50041 & 0 \\ 0.051105 & -4.7659 & 59.076 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü üzere helikopter dinamiğinin birleşiklik derecesi yüksektir ve bu dinamik uçuş sırasında istenen bir özellik değildir. Bu nedenle referans model olarak birleşiklik derecesi sıfır olan ve belirtilen eksenlerde durum komutlama ve tutma kapasitesi olan aşağıdaki model seçilmiştir.

$$\dot{x}_{ref} = A_{ref}x_{ref} + B_{ref}r$$

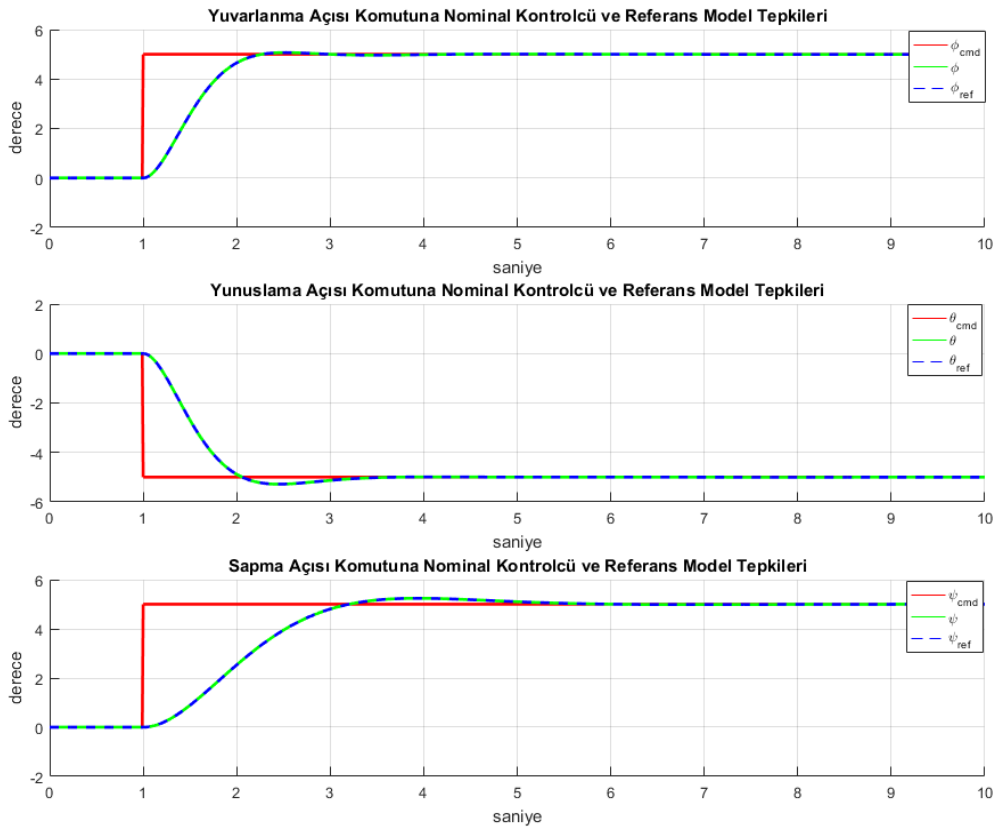
$$x = [u_{ref} \ v_{ref} \ p_{ref} \ q_{ref} \ r_{ref} \ \phi_{ref} \ \theta_{ref} \ \psi_{ref}]^T$$

$$r = [\phi_{cmd} \ \theta_{cmd} \ \psi_{cmd}]^T$$

$$A_{ref} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.2 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.2 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 & 0 & -2.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

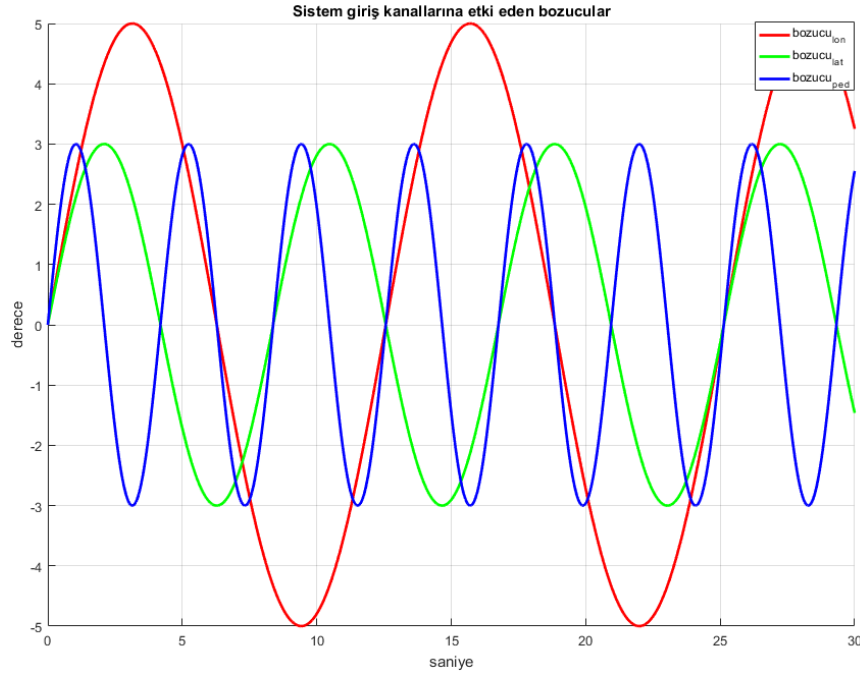
$$B_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi referans model birleşik olmayan bir dinamik içermektedir. Referans model tepkisi komutlanan eksenindeki açıya ulaşacak ve tutacak şekildedir. Daha önce bahsedilen K_{fb} ve K_{ff} kazanç matrisleri hesaplanır ve kapalı döngü sistem elde edilirse, bu sistemin referans model ile aynı olduğu garanti edilecektir. Nominal kontrolcü kazançları uygulanarak sistemde herhangi bir bozucu etki yokken kapalı döngü sistemin davranışına bakacak olursak,

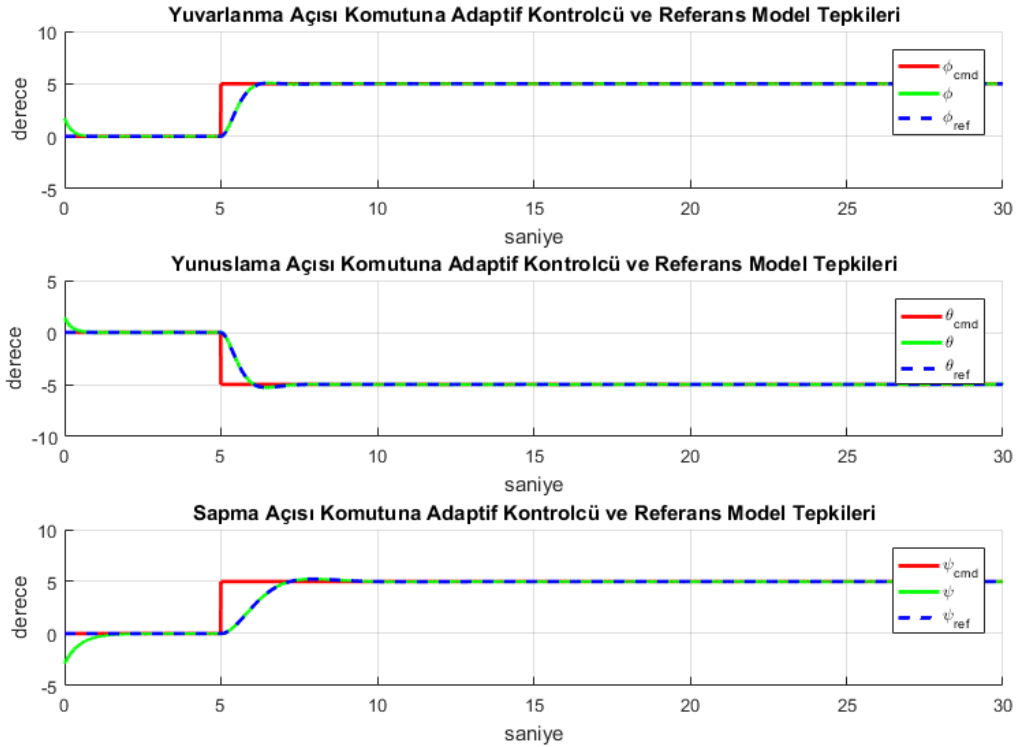


Şekil 4: Durum Komutlarına Nominal Kontrolcü ve Referans Model Tepkileri

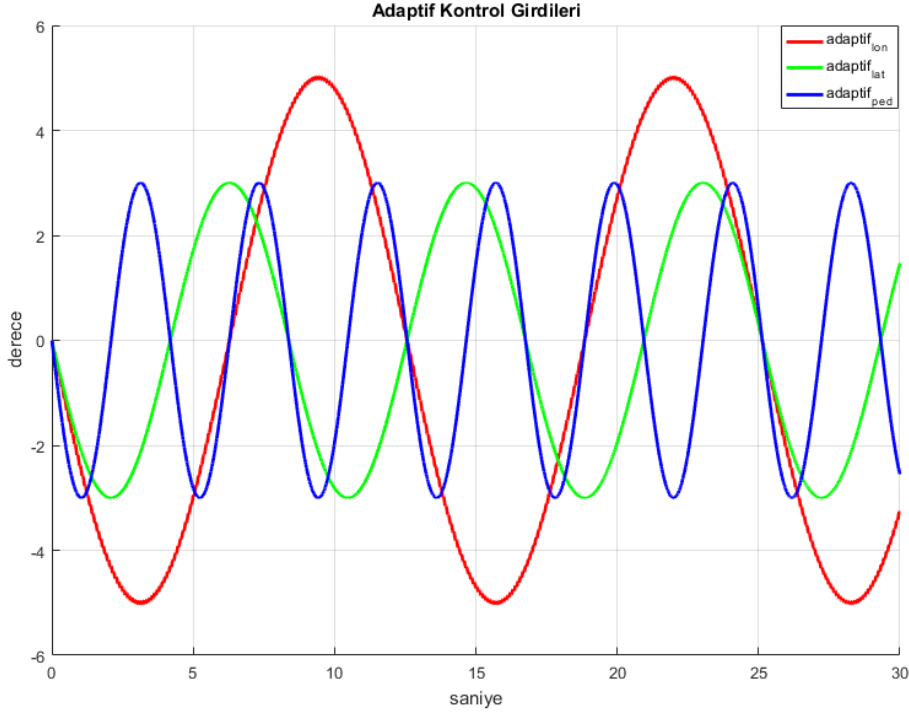
Daha sonra sistem giriş kanalları üzerine bozucular eklenerek adaptif kontrolcünün bozucuyu sönümleme performansı gösterilebilir. Ayrıca sistem denge noktası dışında bir noktadan başlatılarak kontrolcünün sistemi tekrar denge noktasına götürmesi amaçlanmaktadır.



Şekil 5: Sistem giriş kanallarındaki bozucu etkiler



Şekil 6: Durum Komutlarına Adaptif Kontrolcü ve Referans Model Tepkileri



Şekil 7: Adaptif Kontrolcü Girdileri

SONUÇLAR

Şekil 1'de görüldüğü gibi nominal kontrolcü, özellikle sistemde harici bir bozucu ve sensör gürültüsü olduğunda makul takip performansı sağlamamaktadır. Bu amaçla uyarlanabilir kontrolcü sisteme eklenmiştir. Harici bozucu yapılandırılmamış belirsizlik olduğundan, Chebyshev Polinomları gibi evrensel yaklaşımıcılar model referans adaptif kontrolünde parametrizasyon için iyi bir seçim olacaktır.

Şekil 2'de, uyarlanabilir kontrolcünün tepkisi verilmiştir. Chebyshev Polinomlarının sistem üzerindeki belirsizliklere zamana bağlı Chebyshev fonksiyonları ile iyi bir biçimde yaklaştığını açıkça görüyoruz. Bu belirsizlikler, eşleşmiş belirsizlik $f(x)$, sensör gürültüsü ve kanatçık üzerindeki bozuculardır. Şekil 3'te, sistem üzerindeki toplam girdi ve uyarlanabilir ağırlıklar gösterilmiştir. Tüm uyarlanabilir ağırlıkların belirli bir limit altında kaldığı ve sistemdeki toplam girdinin makul aralıkta olduğu açık bir şekilde söylenebilir.

Şekil 4'te helikopter dinamiğinin nominal kontrolcüler sayesinde referans olarak seçilen model ile birebir tepkiyi verdiği gösterilmektedir. Sistem üzerine Şekil 5'teki gibi bozucu girdiler eklenmesine rağmen adaptif kontrolcü Şekil 6'daki takip performansını göstermekte ve sistem üzerindeki belirsizliklere karşı sönümleyici bir etki göstermektedir. Son olarak Şekil 7'de görüldüğü üzere Chebyshev fonksiyonları sistem üzerindeki belirsizliğe iyi bir şekilde yaklaşmış ve Şekil 5'teki bozucu etkilerin tersi yönde girdi üreterek sistem üzerindeki belirsizliği yok etmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] E. Lavretsky, K. A. Wise, *Robust Adaptive Control With Aerospace Applications*, Springer-Verlag London, 2013
- [2] K. J. Astrom, B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison-Weseley, 1995
- [3] N. Nguyen, J. Burken, A. Ishihara, Least-Squares Adaptive Control Using Chebyshev Orthogonal Polynomials, *Journal of Sound and Vibration*. 2013 AIAA 2011-1402
- [4] J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman and Hall/CRC, 2002
- [5] K. S. Narendra, A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, NJ: Prentice-Hall, 2007
- [6] A. Gil, J. Segura, N. M. Temme, *Numerical Methods for Special Functions*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007